Bukiety matematyczne
101 ciekawych zadań

dla najmłodszych

Karol Pokorski

Wrocław, 2024

Każdy bukiet zawiera kilka zadań dotyczących tego samego tematu o rosnącym poziomie trudności. Założenie jest takie, że rozwiązywanie zadań po kolei przygotowuje do rozwiązania zadań najtrudniejszych na końcu bukietu. Dzieci są w stanie w ten sposób zrozumieć i samodzielnie rozwiązać nawet bardzo trudne zadania, które bez odpowiednio dobranych ćwiczeń wstępnych byłyby nie do pokonania.

Kolejne bukiety są o stopniowo coraz większym poziomie trudności i zakłada się przy nich coraz większą wiedzę i umiejętności rozwiązującego. Po każdym bukiecie umieszczone są rozwiązania. W przypadku początkowych bukietów obrazują one typowy tok rozumowania sprytnego młodego matematyka.

Mam nadzieję, że ta darmowa broszura będzie dobrym narzędziem do pracy z najmłodszymi dziećmi. Pisząc tutaj o *młodych*, mam na myśli w szczególności również takie dzieci, które uszczęszczają jeszcze do przedszkola, którym nie jest potrzebne prezentowanie monografii kolejnych cyfr, zanim będą mogły przystąpić do rozwiązywania problemów. Są one w stanie rozwiązać sporą liczbę zadań co najmniej z kilku pierwszych bukietów. Niestety, podręczniki szkolne do klasy pierwszej i klasy drugiej szkoły podstawowej nie są przystosowane, aby zadowolić ich gusta. Za pomocą tej publikacji staram się zapełnić tę lukę. Zakładam, że rodzic (lub ewentualnie nauczyciel), który zauważy u dziecka zainteresowanie matematyką będzie mógł wykorzystać w odpowiedni sposób kolejne bukiety i pomoże dziecku przebrnąć potencjalne trudności po drodze.

Po więcej materiałów tego typu zapraszam na moją stronę internetową `https://blog.pokorski.edu.pl`. Życzę powodzenia we wspólnym rozwiązywaniu zadań razem z dziećmi.

Autor

Bukiet 1 (o oddawaniu kwiatków)

Zadania

1. Julia ma 5 kwiatków, a Zuzia ma 9 kwiatków. O ile więcej kwiatków ma Zuzia?

2. Julia ma 5 kwiatków, a Zuzia ma 9 kwiatków. Ile kwiatków Zuzia powinna dać Julii, żeby obie miały po tyle samo kwiatków?

3. Julia ma 8 kwiatków, a Zuzia dwa razy więcej. Ile kwiatków mają razem?

4. Julia ma 14 kwiatków, a Zuzia ma 28 kwiatków. Zuzia postanowiła oddać niektóre swoje kwiatki dla Julii, żeby miały po tyle samo kwiatków. Po ile kwiatków będą miały Julia i Zuzia po tej operacji?

5. Julia i Zuzia mają razem 20 kwiatków, przy czym Zuzia ma o 4 kwiatki więcej niż Julia. Ile kwiatków ma Julia, a ile Zuzia?

6. Julia kupiła pierwszego dnia 1 kwiatek. Każdego kolejnego dnia kupuje o 1 kwiatek więcej niż poprzedniego dnia. Ile razem kwiatków będzie miała po siedmiu dniach?

7. Julia kupiła pierwszego dnia 1 kwiatek. Każdego kolejnego dnia kupuje dwa razy tyle kwiatków co poprzedniego dnia. Ile razem kwiatków będzie miała po sześciu dniach?

Rozwiązania

1. Zuzia ma o $9 - 5 = 4$ kwiatki więcej niż Julia.

2. Zuzia powinna oddać Julii 2 kwiatki.

   Wtedy Julia będzie miała $5 + 2 = 7$ kwiatków, a Zuzi pozostanie $9 - 2 = 7$ kwiatków.

3. Zuzia ma $8 + 8 = 16$ kwiatków.

   Julia i Zuzia mają razem $8 + 16 = 24$ kwiatki.

4. Julia i Zuzia mogą najpierw zsumować wszystkie swoje kwiatki. Będą miały razem $14 + 28 = 42$ kwiatki. Następnie mogą się tym podzielić po równo.

   Julia będzie miała 21 kwiatków.

5. Gdyby Julia i Zuzia miały tyle samo kwiatków to każda miałaby ich po 10. Gdyby wtedy zabrać Julii dwa kwiatki i oddać je Zuzi, wtedy Julia miałaby $10 - 2 = 8$ kwiatków, a Zuzia $10 + 2 = 12$ kwiatków. Zuzia miałaby wtedy o 4 kwiatki więcej niż Julia.

   Julia ma 8 kwiatków, a Zuzia 12 kwiatków.

6. Julia będzie miała $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ kwiatków.

7. W kolejne dni Julia będzie zakupywać $1, 2, 4, 8, 16, 32$ kwiatki. Razem będzie miała kolejno $1, 3, 7, 15, 31, 63$ kwiatki.

   Julia będzie miała 63 kwiatki po sześciu dniach.

Bukiet 2 (o dzieleniu cukierków)

Zadania

1. Michał ma 8 cukierków. Chce je podzielić po równo między siebie i swojego brata Andrzeja. Ile cukierków otrzyma każdy z nich?

2. Michał ma pewną liczbę cukierków. Podzielił je równo między siebie i swoich dwóch kolegów. Każdy otrzymał po 5 cukierków. Ile cukierków miał Michał na początku?

3. Michał ma 10 cukierków. Chciałby je podzielić po równo między siebie, swojego brata Andrzeja i swoją siostrę Julię. Niewykorzystane cukierki odda mamie. Ile cukierków otrzyma mama?

4. Michał ma 17 cukierków. Chce je podzielić po równo między siebie i czterech kolegów. Aktualnie rozdzielenie wszystkich cukierków jest niemożliwe. Mama zaproponowała, że dołoży Michałowi kilka cukierków. Ile najmniej cukierków powinna dołożyć mama, żeby podział cukierków mógł się udać?

5. Michał ma pewną liczbę cukierków. Gdy Michał podzielił cukierki równo między siebie i swoich czterech kolegów, pozostały 3 nieprzydzielone cukierki. Michał postanowił więc podzielić cukierki tylko między swoich kolegów (nie dając sobie nic), wtedy każdy otrzymał po 3 cukierki i pozostała pewna liczba nieprzydzielonych cukierków. Ile cukierków miał Michał na początku?

6. Michał ma pewną liczbę cukierków. Wiadomo, że jest ich pomiędzy 55 a 65. Podzielił cukierki po równo między dziewięć dzieci (licząc razem ze sobą). Pozostało mu sześć nieprzydzielonych cukierków. Ile cukierków miał Michał na początku?

Rozwiązania

1. Każdy otrzyma po 4 cukierki.

2. Są trzy osoby razem z Michałem.

   Cukierków jest $5 + 5 + 5 = 15$.

3. Razem z Michałem jest troje rodzeństwa. Gdyby każdy otrzymał po jednym cukierku to zużylibyśmy 3 cukierki. Gdyby dołożyć każdemu jeszcze po jednym cukierku – zużylibyśmy ich razem już $3 + 3 = 6$. Gdyby dołożyć każdemu trzeci cukierek – zużylibyśmy ich razem już $3+3+3 = 9$. Pozostał już tylko jeden dodatkowy cukierek.

   Mama otrzyma 1 cukierek.

4. Razem z Michałem jest pięć osób. Gdyby próbować rozdzielić 17 cukierków między nich, każdy otrzymałby po 3 cukierki i pozostałyby 2 nierozdzielone cukierki. Mama powinna dołożyć cukierki tak, żeby z tych nierozdzielonych i dołożonych przez mamę cukierków można było każdemu dać jeszcze po jednym.

   Mama powinna dołożyć Michałowi jeszcze co najmniej 3 cukierki.

5. Jeżeli dzieląc cukierki między cztery osoby wydano każdemu po 3 cukierki i pozostała jakaś reszta, to cukierków musiało być więcej niż $3+3+3+3 = 12$, ale mniej niż $4 + 4 + 4 + 4 = 16$, a więc cukierków było 13, 14 lub 15. Tylko 13 cukierków podzielone po równo na pięć osób (razem z Michałem) dałoby 3 nieprzydzielone.

   Michał miał na początku 13 cukierków.

6. Gdyby każde dziecko dostało po 5 cukierków to dzieci miałyby razem 45 cukierków. Dokładając do tego szesć nieprzydzielonych cukierków otrzymujemy, że cukierków byłoby wtedy 51, czyli za mało.

   Gdyby każde dziecko dostało po 6 cukierków to dzieci miałyby razem 54 cukierki. Dokładając do tego szesć nieprzydzielonych cukierków otrzymujemy, że cukierków byłoby wtedy 60, czyli pomiędzy 55 a 65.

   Gdyby każde dziecko dostało po 7 cukierków to dzieci miałyby razem 63 cukierki. Dokładając do tego szesć nieprzydzielonych cukierków otrzymujemy, że cukierków byłoby wtedy 69, czyli za dużo.

   Michał miał na początku 60 cukierków.

Bukiet 3 (o uzupełnianiu pól liczbami i cyframi)

Zadania

1. Uzupełnij każde pole **tę samą** liczbą, aby równość była spełniona.

$$\square + \square = 10$$

2. Uzupełnij pole liczbą, aby równość była spełniona.

$$5 + \square = 21$$

3. Uzupełnij każde pole **tę samą** liczbą, aby równość była spełniona.

$$\square + \square + \square + \square = 28$$

4. Uzupełnij każde pole **tę samą** liczbą, aby równość była spełniona.

$$\square + \square + \square = 36$$

5. Uzupełnij każde pole **tę samą** liczbą, aby równość była spełniona.

$$\square + \square + \square = \square + \square + \square + \square$$

6. Uzupełnij każde pole **tę samą** liczbą, aby równość była spełniona.

$$9 + \square + \square = 31$$

7. Uzupełnij każde pole **tę samą** liczbą, aby równość była spełniona.

$$30 - \square = \square$$

8. Uzupełnij każde pole **tę samą** liczbą, aby równość była spełniona.

$$\square + \square = 24 - \square$$

9. Uzupełnij każde pole **tę samą** liczbą, aby równość była spełniona.

$$50 - \square = \square + 16$$

Rozwiązania

1. W oba pola trzeba wpisać tę samą liczbę, a więc połowę liczby 10.

$$\boxed{5} + \boxed{5} = 10$$

2. Jeżeli dodamy $5 + 15$, otrzymamy 20, czyli o 1 za mało. Należy więc dodać o 1 więcej niż 15, żeby wyszło 21.

$$5 + \boxed{16} = 21$$

3. Gdyby liczby nie musiały być takie same, działałoby $10 + 10 + 4 + 4 = 28$. Można jednak każdą dziesiątkę zmniejszyć o 3, a dzięki temu każdą czwórkę będzie można zwiększyć o 3.

$$\boxed{7} + \boxed{7} + \boxed{7} + \boxed{7} = 28$$

4. $10+10+10$ dałoby 30, czyli za mało. Żeby uzyskać brakujące 6, należałoby jeszcze dodać do tego $2 + 2 + 2$.

$$\boxed{12} + \boxed{12} + \boxed{12} = 36$$

5. Jedyną pasującą liczbą w tym zadaniu może być tylko zero.

$$\boxed{0} + \boxed{0} + \boxed{0} = \boxed{0} + \boxed{0} + \boxed{0} + \boxed{0}$$

6.
$$9 + \boxed{11} + \boxed{11} = 31$$

7.
$$30 - \boxed{15} = \boxed{15}$$

8.
$$\boxed{8} + \boxed{8} = 24 - \boxed{8}$$

9.
$$50 - \boxed{17} = \boxed{17} + 16$$

Bukiet 4 (o pieniądzach)

Zadania

1. Jeden batonik kosztuje 3 zł. Ile batoników można kupić za 20 zł?

2. Za sześć jabłek trzeba zapłacić o 8 zł więcej niż za cztery jabłka. Ile kosztuje pięć jabłek?

3. Andrzej i Michał mają jedną pięciozłotówkę, pięć dwuzłotówek i jedną złotówkę. Podzielili się tymi pieniędzmi po równo. Ile monet dostał Michał, jeżeli nie wziął dla siebie pięciozłotówki?

4. Jedna czekolada kosztuje 4 zł, ale możliwe jest kupienie czterech czekolad w promocji płacąc tylko 14 zł. Ile czekolad można kupić za 40 zł?

5. Kanapka kosztuje 9 zł. Andrzej kupił ją płacąc czterema monetami. Jakie to były monety?

6. Ile minimalnie ruchów potrzeba, aby z poniższego ustawienia uzyskać sytuację, w której na wierzchu są same reszki? W każdym ruchu należy obrócić na drugą stronę **dokładnie trzy** (niekoniecznie sąsiednie) monety.

7. W supermarkecie lizak kosztuje 1.99 zł. Ile lizaków można kupić za 25 zł?

Rozwiązania

1. Za 20 zł można kupić 6 batoników.

2. Pakiety sześciu i czterech jabłek różnią się o dwa jabłka, a więc dwa jabłka kosztują 8 zł. Jedno jabłko kosztuje połowę tego, a więc 4 zł.

   Pięć jabłek kosztuje $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$ złotych.

3. Andrzej i Michał mają razem $5+2+2+2+2+2+1 = 16$ zł. Każdy powinien wziąć dla siebie połowę tej kwoty, a więc 8 zł. Skoro Michał nie wziął pięciozłotówki, a kwota, którą ma wziąć dla siebie jest parzysta, to musiał wziąć same dwuzłotówki.

   Michał dostał 4 monety (były to same dwuzłotówki).

4. Możliwy jest zakup dwóch pakietów czterech czekolad. Będzie to kosztowało $14 + 14 = 28$ złotych. Trzeci pakiet za kolejne 14 zł, spowodowałby podniesienie rachunku do 42 zł i przekroczenie budżetu. Możliwe jest jednak dokupienie trzech pojedynczych czekolad, płacąc dodatkowe 12 zł.

   Za 40 złotych można kupić $4 + 4 + 3 = 11$ czekolad.

5. Gdyby Andrzej nie użył pięciozłotówki, to byłby w stanie zapłacić co najwyżej $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ zł. Gdyby użył dwóch lub więcej pięciozłotówek to zapłaciłby co najmniej $5+5 = 10$ zł. Andrzej musiał więc użyć dokładnie jednej pięciozłotówki, a pozostałe $9 - 5 = 4$ zł zapłacił trzema monetami.

   Tak samo uzasadniamy, że Andrzej musiał użyć dokładnie jednej dwuzłotówki. Aby zapłacić resztę: $4-2 = 2$ zł, należy dodać jeszcze dwie złotówki.

   Andrzej zapłacił monetami 5 zł, 2 zł, 1 zł i 1 zł.

6. Należy wykonać 3 ruchy.

   Na początku mamy 4 reszki. Poniższy rysunek prezentuje możliwe liczby reszek po wykonaniu odpowiednich ruchów (bez cofania się do sytuacji z taką samą liczbą reszek).

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & & 0 & \\ & 3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ 4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 2 \arrow[r] & 5 \\ & 1 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

7. 1.99 zł to 2 złote minus 1 grosz. Aby oszczędzić złotówkę na tym „*minus jeden groszu*” trzeba by kupić aż 100 lizaków. Za 25 zł kupimy więc tyle samo lizaków co przy cenie 2 zł za lizaka. Za 20 złotych można kupić 10 lizaków. Za pozostałe 5 zł uda się kupić jeszcze 2 lizaki.

   Za 25 zł można kupić 12 lizaków.

Bukiet 5 (o mierzeniu)

Zadania

1. Jest 100 centymetrów w jednym metrze. Dom ma wysokość 900 centymetrów. Ile to metrów?

2. Długa guma balonowa ma długość 2 metry. Michał oderwał 60 centymetrów tej gumy dla siebie, a Andrzej oderwał 40 centymetrów tej gumy dla siebie. Ile metrów gumy pozostało?

3. Dwa cale to około pięć centymetrów. Ile centymetrów jest w sześciu calach?

4. Litr to 1 000 mililitrów. Puszka napoju ma 330 mililitrów, a mała butelka zawiera pół litra napoju. Czy więcej napoju zawierają trzy puszki czy dwie małe butelki? O ile?

5. Jeden jard to trzy stopy, a jedna stopa to dwanaście cali. Ile jest cali w dwóch jardach?

6. 0 stopni Celsjusza to 32 stopnie Fahrenheita. Każde 10 stopni Celsjusza więcej to o 18 stopni Fahrenheita więcej.

   Ile stopni Fahrenheita jest wtedy, gdy termometr wskazuje 25 stopni Celsjusza?

Rozwiązania

1. 900 to dziewięć setek. Każde sto centymetrów to jeden metr.

   Dom ma 9 metrów wysokości.

2. 2 metry gumy to 200 centymetrów. Michał i Andrzej razem oderwali $60 + 40 = 100$ centymetrów gumy czyli jeden metr.

   Pozostał 1 metr gumy.

3. Zauważamy, że 6 cali to $2 + 2 + 2$ cale. Każde dwa cale to około pięć centymetrów.

   W sześciu calach jest $5 + 5 + 5 = 15$ centymetrów.

4. Trzy puszki mają razem $330 + 330 + 330 = 990$ ml. Dwie małe butelki mają dwie połówki litra czyli cały litr (1 000 ml).

   Więcej napoju ($1\,000 - 990 = 10$ ml) jest w dwóch małych butelkach.

5. W jardzie są trzy stopy, a każda z nich to 12 cali. W jednym jardzie mamy zatem $12 + 12 + 12 = 36$ cali.

   W dwóch jardach są $36 + 36 = 72$ cale.

6. 10 stopni Celsjusza to $32 + 18 = 50$ stopni Fahrenheita.

   20 stopni Celsjusza to $50 + 18 = 68$ stopni Fahrenheita.

   Wzrost temperatury o jeszcze 5 stopni Celsjusza przekłada się na wzrost o jeszcze 9 stopni Fahrenheita (połowa z 18 stopni).

   25 stopni Celsjusza to 77 stopni Fahrenheita.

Bukiet 6 (o wybieraniu liczb, żeby sumowały się...)

Zadania

1. Zaznacz kółkiem **dwie** spośród poniższych liczb, żeby uzyskać sumę 8:

   $$6 \quad 5 \quad 2 \quad 7$$

2. Przekreśl jedną z poniższych liczb, aby pozostałe dawały sumę 27.

   $$5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

3. Zaznacz kółkiem niektóre spośród poniższych liczb, żeby uzyskać sumę 28:

   $$6 \quad 11 \quad 9 \quad 7 \quad 6$$

4. Zaznacz kółkiem **trzy** spośród poniższych liczb, żeby uzyskać najmniejszą **nieparzystą** sumę.

   $$6 \quad 7 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13$$

5. Jakie **trzy kolejne** liczby naturalne dają sumę 27?
6. Jaka trzycyfrowa liczba jest taka sama jak dwie setki oraz 35 dziesiątek?
7. Suma **dwóch kolejnych** liczb jest liczbą trzycyfrową. Ile co najmniej musi być równa większa z tych dwóch liczb?
8. Suma **czterech kolejnych** liczb jest liczbą dwucyfrową. Ile co najwyżej może być równa najmniejsza z tych liczb?

Rozwiązania

1.

   6 5 2 7

2. Można policzyć sumę wszystkich liczb $5+6+7+8+9 = 35$. Różnica między tą sumą, a celem 27 to $35 - 27 = 8$, a więc należy pozbyć się liczby 8.

   5 6 7 ~~8~~ 9

3.

   6 11 9 7 6

4. Aby suma była najmniejsza możliwa, należałoby wybrać trzy najmniejsze liczby. Wtedy jednak okazałoby się, że suma $6 + 7 + 9 = 22$ jest parzysta. W związku z tym należy wymienić jedną z wybranych liczb na tę o innej parzystości (parzystą na nieparzystą lub nieparzystą na parzystą). W tym przypadku wystarczy wymienić liczbę 9 na 10, co zwiększa sumę tylko o 1.

   6 7 9 10 11 12 13

5. Spróbujmy zgadnąć środkową liczbę z trzech kolejnych. Pierwsza będzie o jeden mniejsza niż ona, a trzecia o jeden większa. Ponieważ $9+9+9 = 27$ to również $8 + 9 + 10 = 27$.

   Te liczby to $8, 9, 10$.

6. Ta liczba to $200 + 350 = 550$.

7. Liczba trzycyfrowa to co najmniej 100. Jeżeli dodajemy do siebie dwie liczby to przynajmniej jedna powinna być równa 50. Liczby mają być kolejne, czyli różnić się o 1. Gdyby spróbować $49 + 50 = 99$, to byłoby za mało. Jednak $50 + 51 = 101$ jest już liczbą trzycyfrową.

   Większa z dwóch liczb musi być równa przynajmniej 51.

8. Liczby dwucyfrowe są mniejsze niż 100. Gdyby na moment założyć, że wszystkie cztery liczby będą równe (a nie kolejne) to liczby musiałyby być mniejsze niż 25, bo już $25 + 25 + 25 + 25 = 50 + 50 = 100$. Liczby mają być kolejne, a nie równe sobie, ale przynajmniej jedna z nich musi być mniejsza niż 25.

   Gdyby spróbować $24 + 25 + 26 + 27 = 102$, to byłoby za dużo, jednak już $23 + 24 + 25 + 26 = 98$ czyli suma jest dwucyfrowa.

   Najmniejsza z czterech liczb musi być równa co najwyżej 23.

Bukiet 7 (o zegarze)

Zadania

1. Pociąg odjeżdża za pół godziny. Teraz jest godzina 13^{10}. O której godzinie odjeżdża pociąg?
2. Pociąg odjeżdża za pół godziny, o godzinie 14^{20}. Która godzina jest teraz?
3. Teraz jest godzina 12^{00}. Jaka godzina będzie za 50 godzin?
4. Ile minut jest w czterech godzinach?
5. Samolot odlatuje za trzy i pół minuty. Ile to sekund?
6. Pewien lekarz pracuje w szpitalu od godziny 19^{30} do godziny 9^{30}. O której godzinie ten lekarz ma za sobą dokładnie połowę czasu pracy?
7. Ile razy w ciągu doby wskazówki zegara pokrywają się?

Rozwiązania

1. Pociąg odjeżdża o 13^{40}.

2. Teraz jest 13^{50}.

3. Ponieważ $24 + 24 + 2 = 50$ to za 50 godzin upłyną dwa pełne dni i jeszcze dwie godziny.

   Za 50 godzin będzie godzina 14^{00}.

4. Jedna godzina ma 60 minut.

   Cztery godziny to $60 + 60 + 60 + 60 = 240$ minut.

5. Jedna minuta ma 60 sekund. Połowa minuty to 30 sekund.

   Samolot odleci za $60 + 60 + 60 + 30 = 210$ sekund.

6. Lekarz będzie pracował 4 godziny i 30 minut do północy i jeszcze 9 godzin i 30 minut po północy. Razem przepracuje więc 14 godzin. Połowa jego czasu pracy będzie 7 godzin po jej rozpoczęciu, a więc jedną godzinę i 30 minut po północy.

   Połowa czasu pracy lekarza przypada na godzinę 1^{30} w nocy.

7. Wskazówka godzinowa wykonuje dwa pełne obroty w ciągu doby. W ciągu jednego obrotu wskazówki godzinowej, wskazówka minutowa pokryje ją 11 razy: raz idealnie o godzinie 0^{00}, następnie kilka minut po godzinie pierwszej, nieco ponad dziesięć minut po godzinie drugiej, ..., kilka minut przed godziną jedenastą.

   W ciągu doby wskazówki zegara pokrywają się $11 + 11 = 22$ razy.

Bukiet 8 (o uzupełnianiu pól liczbami i cyframi)

Zadania

1. Uzupełnij każde pole **jedną cyfrą**, aby nierówności były spełnione.

$$9 < \square\square < 11 < \square 0 < 25$$

2. Uzupełnij każde pole **jedną cyfrą**, aby nierówności były spełnione.

$$23 < \square 9 < \square 8 < \square\square < \square\square < 41$$

3. Uzupełnij każde pole **jedną cyfrą**, aby równość była spełniona.

$$\square 3 - \square = 54$$

4. Uzupełnij każde pole **jedną cyfrą**, aby równość była spełniona.

$$\square 7 + 12 = 30 + 21 + \square$$

5. Uzupełnij każde pole **jedną cyfrą**, aby równości były spełnione.

$$36 + \square\square = 40 + 5\square = 30 + \square 1$$

6. Uzupełnij pole **liczbą**, aby równość była spełniona.

$$47 - \square = 52 - 20$$

7. Uzupełnij pole **liczbą**, aby równość była spełniona.

$$70 - \square - 3 - 7 - 4 - 6 - 5 = 40$$

Rozwiązania

1. $9 < \boxed{1}\boxed{0} < 11 < \boxed{2}0 < 25$

2. $23 < \boxed{2}9 < \boxed{3}8 < \boxed{3}\boxed{9} < \boxed{4}\boxed{0} < 41$

3. Ponieważ cyfra jedności 3 jest mniejsza niż cyfra jedności wyniku 4, wynikowa cyfra jedności musiała powstać przez obliczenie $13 - \square = 4$. To oznacza, że po lewej stronie równości należy odjąć 9. Ponieważ musieliśmy „pożyczyć" brakującą dziesiątkę, a cyfra dziesiątek wyniku jest równa 5, to musieliśmy mieć 6 dziesiątek przed odjęciem po lewej stronie równości.

   $\boxed{6}3 - \boxed{9} = 54$

4. Po lewej stronie równości cyfra jedności jest równa $7 + 2 = 9$. Po prawej stronie równości jest $30 + 21 + \square = 51 + \square$, a więc należy dodać 8, żeby uzyskać po prawej stronie 59. Po lewej stronie należy więc uzyskać pięć pełnych dziesiątek, a więc należy dodać 47 do 12.

   $\boxed{4}7 + 12 = 30 + 21 + \boxed{8}$

5. Cyfrę jedności można wywnioskować z prawej strony równania $30 + \square 1$ i jest to jedynka. Cyfrę dziesiątek można wywnioskować z środkowej części równania $40 + 5\square$ i jest to dziewiątka.

   Po lewej stronie równości dodajemy pewną liczbę do 36 zamiast dodawać 51 do 40, a więc ta tajemnicza liczba musi być o 4 większa od 51, czyli musi być równa 55.

   $36 + \boxed{5}\boxed{5} = 40 + 5\boxed{1} = 30 + \boxed{6}1$

6. Nieważne ile jest równe $52 - 20$. Po lewej stronie równości odejmujemy od liczby 47, a więc od liczby o 5 mniejszej. Żeby wyszło tyle samo, musimy odjąć o 5 mniej, czyli musimy odjąć 15.

   $47 - \boxed{15} = 52 - 20$

7. Od liczby 70 należy odjąć 30, żeby wyszło 40. Odjęliśmy już 3, 7, 4, 6 oraz 5. Razem odjęliśmy więc $3 + 7 + 4 + 6 + 5 = 25$. Pozostało odjąć jeszcze $30 - 25 = 5$.

   $70 - \boxed{5} - 3 - 7 - 4 - 6 - 5 = 40$

Bukiet 9 (o kalendarzu)

Zadania

1. Trzy kwadranse, ile to minut?

2. Julia przyjechała do hotelu przedwczoraj, a wyjedzie jutro. Ile nocy spędzi w hotelu?

3. Julia wczoraj powiedziała, że „*pojutrze będzie piątek*". Jaki dzień tygodnia jest dzisiaj u Julii?

4. Julia miała urodziny dokładnie trzy miesiące temu. Za ile miesięcy będzie miała kolejne urodziny?

5. Poniedziałek jest piątym dniem pewnego miesiąca. Którym dniem jest sobota między trzynastym, a dwudziestym trzecim dniem tego miesiąca?

6. Kwiecień ma 30 dni. Jeżeli pierwszego kwietnia jest piątek, to jakim dniem tygodnia jest pierwszy maja?

7. Jeżeli rok nie jest przestępny, to ma 365 dni. Pewien rok zaczyna się poniedziałkiem. Jakim dniem się kończy?

Rozwiązania

1. Jeden kwadrans to 15 minut.

   Trzy kwadranse to $15 + 15 + 15 = 45$ minut.

2. Julia spędzi w hotelu noc między *przedwczoraj* a *wczoraj*, kolejną noc między *wczoraj* a *dzisiaj* oraz ostatnią noc między *dzisiaj* a *jutro*.

   Julia spędzi w hotelu 3 noce.

3. Jeżeli Julia wczoraj powiedziała, że „*pojutrze będzie piątek*”, to znaczy, że dzisiaj powiedziałaby, że „*jutro będzie piątek*”. W takim razie dzisiaj jest dzień przed piątkiem czyli czwartek.

   Dzisiaj u Julii jest czwartek.

4. W dniu urodzin Julii do następnych urodzin należałoby poczekać cały kolejny rok czyli 12 miesięcy. Trzy z nich już minęły.

   Julia będzie miała następne urodziny za $12 - 3 = 9$ miesięcy.

5. Jeżeli piątego dnia miesiąca jest poniedziałek to za kolejne siedem dni (czyli dwunastego) też będzie poniedziałek. Następne dni to będą wtorek trzynastego, środa czternastego, czwartek piętnastego, piątek szesnastego oraz sobota siedemnastego.

   Następna sobota byłaby już dniem numer $17 + 7 = 24$, a więc w zadaniu musi chodzić dokładnie o siedemnasty dzień tego miesiąca.

   Sobota jest 17-tym dniem tego miesiąca.

6. Piątek jest pierwszym dniem tego miesiąca. Następny piątek będzie dniem numer $1 + 7 = 8$, kolejny piątek to już dzień numer $8 + 7 = 15$. Kolejne piątki będą dnia 22 oraz 29. Potem będzie sobota trzydziestego i miesiąc się skończy. Następna będzie niedziela, pierwszego maja.

   Pierwszy maj przypada w niedzielę.

7. Jeden tydzień to 7 dni. Dziesięć pełnych tygodni to 70 dni. Dodając kolejne dziesiątki tygodni możemy obliczyć, że 50 pełnych tygodni to $70+70+70+70+70 = 350$ dni. Uwzględnienie kolejnego tygodnia daje razem 357 dni, a jeszcze jeden tydzień to już razem 364 dni. Jeżeli pierwszego dnia jest poniedziałek, to ostatniego 365-tego dnia w roku (364 dni później czyli 52 tygodnie później) też jest poniedziałek.

   Ostatni dzień roku to poniedziałek.

Bukiet 10 (o zliczaniu zapisanych liczb)

Zadania

1. Andrzej zapisał kolejne liczby naturalne od 1 do 11. Ile cyfr zapisał?
2. Andrzej zapisał kolejne liczby naturalne od 1 do 15. Ile razy użył cyfry 1?
3. Andrzej zapisał wszystkie liczby dwucyfrowe używając jedynie cyfr 1 i 2. Ile różnych liczb zapisał?
4. Andrzej zapisał kolejne liczby naturalne od 1 do 55. Ile razy użył cyfry 0?
5. Andrzej zapisał kolejne liczby naturalne od 1 do 55. Ile razy użył cyfry 1?
6. Andrzej zapisał wszystkie liczby dwucyfrowe używając jedynie cyfr 1, 2 3, 4 oraz 5. Ile różnych liczb zapisał?
7. Andrzej zapisał wszystkie liczby trzycyfrowe używając jedynie cyfr 1, 2 i 3, przy czym w każdej liczbie każda cyfra była użyta dokładnie raz. Ile różnych liczb zapisał?

Rozwiązania

1. Andrzej zapisał liczby jednocyfrowe $1, 2, 3, \ldots, 9$ (razem 9 cyfr) oraz liczby dwucyfrowe 10 i 11 (razem 4 cyfry).

   Łącznie zapisał więc 13 cyfr.

2. Cyfra 1 występuje w liczbach: 1, 10, 11 (dwa razy), 12, 13, 14 oraz 15.

   Andrzej łącznie zapisał więc 8 cyfr 1.

3. Liczby zapisane przez Andrzeja to: $11, 12, 21, 22$.

   Andrzej zapisał więc 4 liczby.

4. Cyfra 0 może występować w liczbach dwucyfrowych jedynie po prawej (jako cyfra jedności). Liczby, w których występuje więc cyfra zero to: $10, 20, 30, 40, 50$.

   Andrzej zapisał więc 5 razy cyfrę zero.

5. Cyfra 1 występuje w liczbie jednocyfrowej 1. Występuje też jako cyfra dziesiątek w liczbach dwucyfrowych $10, 11, 12, \ldots, 19$ (10 wystąpień), a także jako cyfra jedności w liczbach dwucyfrowych $11, 21, 31, 41, 51$ (5 wystąpień).

   Łącznie więc mamy 16 wystąpień cyfry 1 w liczbach od 1 do 55.

6. Andrzej zapisał pięć liczb z cyfrą 1 jako cyfra dziesiątek (były to liczby $11, 12, 13, 14, 15$). Zapisał również po pięć liczb z cyfrą 2, 3, 4 oraz 5 jako cyfry dziesiątek.

   Andrzej razem zapisał $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$ liczb.

7. Andrzej zapisał liczby $123, 132, 213, 231, 312, 321$ (po dwie liczby z jedynką, dwójką i trójką jako cyfra setek).

   Andrzej zapisał 6 liczb.

Bukiet 11 (o nawiasach i zgadywaniu działań)

Zadania

1. Oblicz:
$$17 - (9 - 5)$$

2. Oblicz:
$$30 - (15 - (6 + 2))$$

3. Wstaw jedną parę nawiasów, aby równość była spełniona.
$$45 - 25 - 5 + 3 + 2 = 30$$

4. Uzupełnij pole odpowiednią liczbą, aby równość była spełniona.
$$17 - (2 + \square) = 8$$

5. Uzupełnij pola znakami $+$, $-$ lub $=$, aby uzyskać prawdziwą równość.
$$4 \square 2 \square 3 \square 11 \square 2$$

6. Uzupełnij pola znakami $+$ lub $-$, aby uzyskać prawdziwą równość.
$$17 \square 3 \square 5 \square 7 \ = \ 16$$

Rozwiązania

1. Najpierw obliczamy wartość wyrażenia w nawiasie: $(9 - 5) = 4$. Następnie wyrażenie upraszcza się do $17 - (9 - 5) = 17 - 4$.

   Wynik to $17 - 4 = 13$.

2. $$30 - (15 - (6 + 2)) = 30 - (15 - 8) = 30 - 7 = 23$$

3. Gdyby nie wstawić nawiasów, lewa strona równości byłaby równa 20. Chcąc zmienić wynik o 10 można, zamiast odejmowania 5, odejmować o 5 mniej (czyli efektywnie: dodawać 5).

   $$45 - (25 - 5) + 3 + 2 = 30$$

4. Chcąc zachować równość, należy tak dobrać wartość $\square$, żeby 17 odjąć wartość wyrażenia w nawiasie była równa 8. Od 17 należałoby odjąć 9, żeby wyszło 8, a więc wartość wyrażenia w nawiasie jest równa 9 $(2 + \square = 9)$. Z tego już można wywnioskować, że w polu należy wpisać $9 - 2 = 7$.

   $$17 - (2 + \boxed{7}) = 9$$

5. $$4 \boxed{+} 2 \boxed{+} 3 = 11 \boxed{-} 2$$

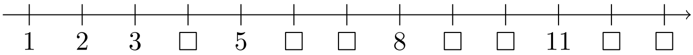
6. Lewa strona równości zaczyna się od liczby 17, celem jest uzyskać 16, czyli o 1 mniej. W tym celu można odjąć 3 oraz 5, a dodać 7.

   $$17 \boxed{-} 3 \boxed{-} 5 \boxed{+} 7 = 16$$

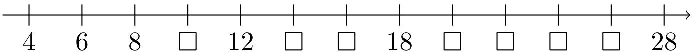
Bukiet 12 (o osi liczbowej)

Zadania

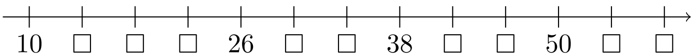
1. Uzupełnij liczby na osi liczbowej.



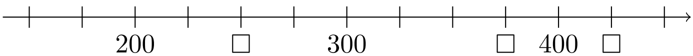
2. Uzupełnij liczby na osi liczbowej.



3. Uzupełnij liczby na osi liczbowej.

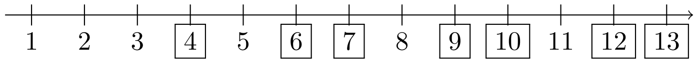


4. Uzupełnij liczby na osi liczbowej.

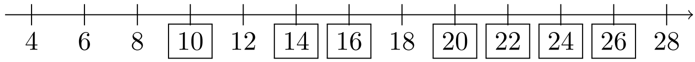


5. Jaka liczba jest dokładnie na środku pomiędzy 77 i 123 na osi liczbowej?

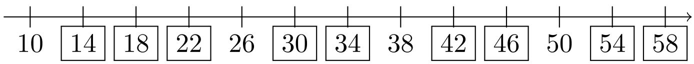
Rozwiązania

1. 

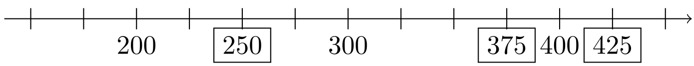
2. Przesunięcie się o jedną jednostkę zaznaczoną na osi zmienia wartość o 2. Możemy to wywnioskować na podstawie pierwszych trzech wartości $4, 6, 8$.



3. Tym razem należy się domyślić o ile zmienia się wartość, gdy przesuniemy się o jedną jednostkę. Przykładowo: przesunięcie się o cztery kolejne zaznaczone punkty zmienia wartość z 10 na 26. Różnica to $26 - 10 = 16$, z tego można wywnioskować, że na jedną jednostkę na osi przypada zmiana o 4 (bo $4+4+4+4 = 16$). Dalej już pozostaje uzupełnić liczby na osi zgodnie z tą wiedzą.



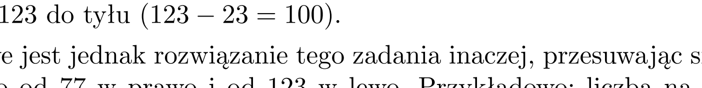
4. Na cztery zaznaczone jednostki na osi liczbowej przypada zmiana wartości o 100. Połowa tej wartości to będą dwie jednostki (a zmiana wyniesie wtedy 50). Połowa tej wartości to jedna jednostka (wtedy zmiana wynosi połowę liczby 50, czyli 25).



5. Możliwe jest oczywiście obliczenie różnicy $123 - 77 = 46$, następnie obliczenie jej połowy (23) i przesunięcie się albo z 77 do przodu ($77 + 23 = 100$) albo z 123 do tyłu ($123 - 23 = 100$).

   Możliwe jest jednak rozwiązanie tego zadania inaczej, przesuwając się o tyle samo od 77 w prawo i od 123 w lewo. Przykładowo: liczba na środku nie zmieni się, gdy zapytamy o parę liczb $(80, 120)$ zamiast $(77, 123)$. Analogicznie można wywnioskować, że parę $(80, 120)$ można zamienić na parę $(90, 110)$ i wreszcie na $(100, 100)$.

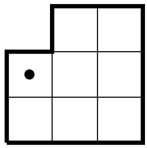
   Niniejszy (poglądowy) rysunek (nie trzymający skali) obrazuje powyższy pomysł:



Bukiet 13 (o systematycznym zliczaniu sposobów)

Zadania

1. Znajdź **wszystkie cztery sposoby**, żeby zacząć od pola z kropką i przechodząc za każdym razem w jednym z czterech kierunków (lewo, prawo, góra, dół) odwiedzić każde pole dokładnie jeden raz.



2. Znajdź wszystkie sposoby uzyskania sumy 12, używając jedynie składników 3 oraz 6. Nie rozróżniamy sposobów różniących się tylko kolejnością składników.

3. Uzupełnij pola wpisując jedynie liczby składające się z cyfr 2 i 9.

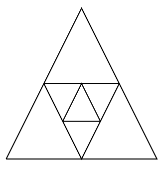
$$2 < \square < \square < \square < \square < \square < \square < 229$$

4. Ile jest liczb dwucyfrowych o sumie cyfr równej 11?

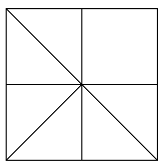
5. Ile różnych napisów można uzyskać ustawiając literki `a`, `a`, `b` oraz `c` w pewnej kolejności?

6. Ile jest liczb trzycyfrowych o sumie cyfr równej 5?

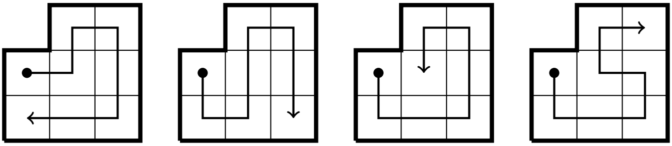
7. Ile jest trójkątów na poniższym rysunku?



8. Podaj liczbę trójkątów na poniższym rysunku.



Rozwiązania

1. 

2. $$6 + 6 = 6 + 3 + 3 = 3 + 3 + 3 + 3$$

3. $$2 < \boxed{9} < \boxed{22} < \boxed{29} < \boxed{92} < \boxed{99} < \boxed{222} < 229$$

4. Jeżeli suma dwóch cyfr ma być równa 11, to obie muszą być równe co najwyżej 9, a więc i co najmniej 2. Wszystkie liczby spełniające ten warunek, spełniają warunek zadania: $29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92$.

   Jest 8 liczb dwucyfrowych o sumie cyfr 11.

5. Wylistujmy (najlepiej alfabetycznie, żeby się nie pomylić) wszystkie napisy rozpoczynające się na `a`. Jest ich 6: `aabc`, `aacb`, `abac`, `abca`, `acab`, `acba`.

   Następnie wylistujmy napisy zaczynające się na `b`. Tym razem pozostają do dyspozycji jeszcze tylko dwie litery `a` oraz jedna litera `c`, a więc napisy będą tylko 3 (zależnie od pozycji litery `c`): `baac`, `baca`, `bcaa`.

   Analogicznie stwierdzamy, że są 3 napisy rozpoczynające się od `c`: `caab`, `caba`, `cbaa`.

   Jest $6 + 3 + 3 = 12$ napisów zgodnych z warunkami zadania.

6. Jest 5 liczb spełniających warunki zadania rozpoczynających się cyfrą 1: $104, 113, 122, 131, 140$.

   Są 4 liczby, gdyby chcieć rozpocząć cyfrą 2: $203, 212, 221, 230$.

   Analogicznie możemy podać 3 liczby rozpoczynające się cyfrą 3 ($302, 311, 320$), 2 liczby rozpoczynające się cyfrą 4 ($401, 410$) oraz jedną liczbę rozpoczynającą się cyfrą 5 (500).

   Jest $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ liczb spełniających warunki zadania.

7. Są 4 małe trójkąty, 4 średnie trójkąty oraz 1 duży trójkąt.

   Na rysunku znajduje się $4 + 4 + 1 = 9$ trójkątów.

8. Jest 6 małych trójkątów, 2 średnie trójkąty oraz 2 duże trójkąty.

   Na rysunku znajduje się $6 + 2 + 2 = 10$ trójkątów.

Bukiet 14 (o mnożeniu)

Zadania

1. O ile większe jest $6 \cdot 6$ niż $5 \cdot 5$?

2. Dodano do siebie dwanaście siódemek. Jaki wyszedł wynik?

3. Podaj cyfrę jedności poniższej liczby.

$$45 \cdot 46 \cdot \ldots \cdot 54 \cdot 55$$

4. O ile większe jest $30 \cdot 90$ od $30 \cdot 89$?

5. Jaka jest najmniejsza wielokrotność dziewiątki powyżej 100?

6. Wiedząc, że $312 \cdot 225 = 70\,200$, oblicz sprytnie ile jest równe $624 \cdot 226$.

Rozwiązania

1. $6 \cdot 6 = 36$, a $5 \cdot 5 = 25$.

   Różnica wynosi $36 - 25 = 11$.

2. Dwanaście siódemek to 10 siódemek (czyli 70) i jeszcze 2 siódemki ($7 + 7 = 14$).

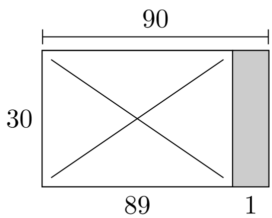
   Wynik to: $70 + 14 = 84$.

3. Wśród liczb $45, 46, \ldots, 54, 55$ znajduje się liczba 50, która jest wielokrotnością liczby 10. Po pomnożeniu tych liczb uzyskamy więc wielokrotność 10, a zatem wynik musi kończyć się zerem.

   Cyfra jedności iloczynu z zadania to 0.

4. Od 90 trzydziestek odejmujemy prawie wszystkie, bo 89 trzydziestek. Jedna trzydziestka zostaje.

   Sytuację obrazuje poniższy rysunek:

   $30 \cdot 90 - 30 \cdot 89 = 30$

5. Gdyby wziąć 10 dziewiątek, uzyskalibyśmy 90. Dokładając jeszcze jedną dziewiątkę otrzymamy sumę $90 + 9 = 99$. Po dołożeniu jeszcze jednej dziewiątki uzyskamy najmniejszą trzycyfrową wielokrotność.

   Najmniejsza wielokrotność dziesiątki powyżej 100 to $99 + 9 = 108$.

6. Zauważamy, że 624 to dwukrotność 312. Z tego możemy wywnioskować, że $624 \cdot 225$ to dwukrotność $312 \cdot 225$. Dwa razy 70 200 to 140 400.

   Aby obliczyć $624 \cdot 226$ należy dodać jeszcze jedno 624.

   $624 \cdot 226 = 140\,400 + 624 = 141\,024$

Bukiet 15 (o wypełnianiu diagramów)

Zadania

1. Przekreśl w poniższych liczbach łącznie dwie cyfry, aby nierówności były spełnione.

$$2424 < 2137 < 2135$$

2. Uzupełnij diagram.

$$\begin{array}{cccc} & \square & 3 & 6 \\ + & 6 & 4 & \square \\ \hline \square & 3 & \square & 1 \end{array}$$

3. Uzupełnij piramidę liczbową. Każda liczba powyżej najniższego poziomu powinna być równa sumie dwóch liczb bezpośrednio pod nią.

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \quad \square \\ 19 \quad 17 \quad \square \\ 5 \quad \square \quad \square \quad 6 \end{array}$$

4. Uzupełnij poniższą tabelę. Liczby zapisane w szarych polach oznaczają sumy białych liczb leżących w odpowiednich wierszach lub kolumnach.

	71	78	
85	10		25
61			10
78	30		

5. Przekreśl niektóre liczby w poniższej tabeli, aby suma pozostawionych liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie była równa 10.

2	1	9	2	3
8	2	8	8	2
9	2	1	2	7
1	7	8	1	1
1	9	1	9	1

Rozwiązania

1. $2\cancel{4}24 < 2\cancel{1}37 < 2135$

2. $$\begin{array}{cccc} & \boxed{7} & 3 & 6 \\ + & 6 & 4 & \boxed{5} \\ \hline \boxed{1} & 3 & \boxed{8} & 1 \end{array}$$

3. Uzupełnienie piramidy możemy rozpocząć od dolnej warstwy od lewej do prawej. Wtedy kolejne pola wyznaczane są jednoznacznie.

62			
36	26		
19	17	9	
5	14	3	6

4. Uzupełnianie tabeli można rozpocząć od pierwszego wiersza oraz od pierwszej kolumny.

	71	78	75
85	10	50	25
61	31	20	10
78	30	8	40

5. Wypełnianie diagramu można rozpocząć od pierwszego wiersza, w którym jedyną możliwością osiągnięcia sumy 10 jest $9+1$. Możemy więc bezpiecznie wykreślić $2, 2, 3$ z pierwszego wiersza i zaznaczyć 9 oraz 1 jako wybrane liczby w pierwszym wierszu.

   Ten wybór powoduje, że w trzeciej kolumnie możemy wykreślić obie ósemki (do 9 należy dobrać jedną z liczb 1). Po tym ruchu łatwo wypełnić czwarty wiersz tabeli, w którym wszystkie inne liczby muszą być pozostawione.

~~2~~	1	9	~~2~~	~~3~~
8	~~2~~	~~8~~	~~8~~	2
~~9~~	2	1	~~2~~	7
1	7	~~8~~	1	1
1	~~9~~	~~1~~	9	~~1~~